***Лекция 10***

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ**

Линейные колебания системы с одной степенью свободы

**Устойчивость положения равновесия системы.**

Все вокруг нас, даже с виду находящееся в покое, совершает периодическое движение, называемое колебаниями. Характерными условиями возникновения колебаний является наличие:

* 1. Равновесного положения (состояния или процесса), около которого совершаются колебания.
	2. Сил, которые стремятся вернуть систему в положение равновесия и поэтому называются *восстанавливающими силами*.

**Определение положения равновесия системы.**

Рассматривается система с идеальными голономными стационарными связями. Пусть число степеней свободы системы ***l*** = 1 и система консервативна с потенциалом П(q)

Чтобы определить имеет ли система положения равновесия, воспользуемся принципом возможных перемещений, который гласит, что если такое положение есть, то в нем потенциальная энергия имеет экстремум.

∂П/∂q =0

Мы получили уравнение для нахождения положения равновесия. Если оно имеет решения, то система имеет положения равновесия.

**Пример**: Обращенный математический маятник.

Так называется математический маятник длины *l* и массы m, удерживаемый в вертикальном равновесном положении спиральной пружиной жесткости c’

с’

φ

Выберем положение равновесия за нулевой уровень потенциальной энергии: П(0) = 0. Функцию П(φ) вычислим как работу силы тяжести и пружины при возвращении маятника в положение равновесия.

П(φ)= - mg*l*(1-Cos φ)+$ \frac{1 }{2} $c’ φ2

Статический принцип возможных перемещений дает условие равновесия:

П’=0 или c’φ =mg*l*Sinφ

Решения этого уравнения находятся в точках пересечения прямой у= c’φ и синусоиды у= mg*l*Sinφ.

Чем меньше жесткость пружины, тем больше положений равновесия будет иметь система. График показывает, что система имеет 4 положения равновесия. При отсутствии пружины их бесчисленное количество, но физически это два вертикальных положения.

φ1=0

φ2

φ3

φ4

φ

у

Если пружина жесткая

c’> mg*l*

то маятник имеет только одно положение равновесия

Различают три типа положения равновесия: устойчивое, неустойчивое, безразличное. Для шарика это положения (1), (2) и (3). При отклонении от устойчивого положения шарик стремится в него вернуться. При малейшем отклонении от неустойчивого положения шарик туда не вернется. Положения безразличного равновесия составляют континуум - рядом с любым из них существует такое же.

1

2

3

Опыт показывает, что колебания возникают только около устойчивого положения равновесия.

**Устойчивость положения равновесия по Ляпунову.**

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и положением равновесия, в котором выберем начало обобщенной координаты q. ***Состояние системы*** определим значениями ее координаты q(t) и скорости $\dot{q}$ (t). Эти параметры примем за координаты ***фазовой плоскости*** *q* $\dot{q}$. Начало фазовых координат соответствует равновесному положению покоя системы.

q

q\*

δ

δ’

- ε’

ε

- δ’

- δ

ε’

-ε

M0(q0q0\*)

Посмотрим как будет двигаться система, если ее вывести из состояния покоя. В момент t=0 дадим системе ***возмущение***: $q\_{o}$ $\dot{q\_{0}}$. . Далее система будет совершать ***возмущенное движение*** и изображающая точка опишет ***фазовую траекторию***.

Рассматриваемое положение равновесия называется ***устойчивым по Ляпунову***, если по любым двум сколь угодно малым числам ε, ε’ можно задать такие два сколь угодно малые числа δ, δ’, что фазовая траектория с началом в области δ никогда не выйдет из области ε.

**Линейные и нелинейные системы. Линеаризация.**

Рассмотрим консервативную систему с потенциальной энергией П(q) и положением равновесия, в котором выберем начало q и нулевой уровень потенциальной энергии:

П(0)=0 П’(0)=0 – условие равновесия

Разложим П(q) в ряд Маклорена, учтя условие равновесия:

П(q)=П(0)+П’(0)q+$\frac{1}{2}$П”(0)q2+….= $\frac{1}{2}$П”(0)q2+….

Первое оставшееся слагаемое в ряду называется ***квадратичной формой***, поскольку содержит квадрат q.

Система называется ***линейной по П***, если П является квадратичной формой q, т.е. все остальные члены разложения равны нулю.

Кинетическая энергия системы.

T=$ \frac{1 }{2}$ ∑ mkVk2  $V\_{k}=\frac{∂r\_{k}}{∂q}\dot{q}\_{}$

T=$ \frac{1 }{2}$ $\left[\sum\_{}^{}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q}\right)^{2}\right]\dot{q}^{2}=\frac{1 }{2}a(q)\dot{q}^{2}$

Функцию a(q) разложим в ряд Маклорена.

a(q) = a(0) + a’(0)q +...

Система называется ***линейной по Т***, если Т является квадратичной формой $\dot{q}^{2}$с постоянным коэффициентом, т.е. a(q)=Const. Система ***линейна***, если она линейна и по Т и по П.

Если система не линейна, то приходится её линеаризировать. ***Линеаризацией*** системы называется введение ограничений, позволяющих считать систему почти линейной. Если рассмотреть малые движения системы q,$ \dot{q}$<<1, то в разложении функции П(q) останется только первый член

П ≈$ \frac{ 1 }{2} $c q2 c = П”(0) – ***жесткость системы***

После линеаризации в разложении a(q) в ряд Маклорена, остается только a (0) ≡ *a*

T = $\frac{1 }{2} $*a*$\dot{q}^{2}$

*Следствие*: Получить квадратичную форму для нелинейной по Т системы можно, вычислив Т в положении равновесия системы.

**Примеры:**

а) Линейная пружина: Т=$ \frac{1 }{2} $m$\dot{x}^{2}$; П =$\frac{ 1 }{2} $cx2 - линейна и по Т и по П:

б) Обращенный маятник: T= $\frac{1 }{2} $ml2$\dot{q}^{2}$; П= - mg*l*(1-Cos φ) +$ \frac{1 }{2} $c’ φ2 - нелинеен П, линеен по Т.

с

**Fв**

m**g**

*l0*

x

y

x

0

с’

φ

**Теорема Лагранжа – Дирихле (об устойчивом положении равновесия консервативной системы).**

**Критерий Сильвестра.**

***Теорема***: для того чтобы данное положение системы было устойчивым по Ляпунову необходимо (но не достаточно) чтобы функция П имела в этом положении минимум.

Выберем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии в положении равновесия. После линеаризации (если требуется), получим:

Для системы с ***одной степенью свободы***

П= $\frac{1}{2} $ c q2 c = П”(0) > 0 – условие минимума и устойчивости

Для системы с ***l*** степеней свободы:

$$П=П\_{0}+\sum\_{}^{}\left(\frac{∂П}{∂q\_{i}}\right)\_{0}q\_{i}+\frac{1}{2}\sum\_{}^{}\left(\frac{∂^{2}П}{∂q\_{i}∂q\_{j}}\right)\_{0}q\_{i}q\_{j}+…≈\frac{1}{2}\sum\_{}^{}c\_{ij}q\_{i}q\_{j}$$

*Коэффициенты жесткости* системы

$c\_{ij}=\left(\frac{∂^{2}П}{∂q\_{i}∂q\_{j}}\right)\_{0} $ i,j=1,2...*l*

образуют матрицу жесткости системы

$$C=\left(\begin{matrix}c\_{11}&\cdots &c\_{1l}\\\vdots &\ddots &\vdots \\c\_{l1}&\cdots &c\_{ll}\end{matrix}\right)$$

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле для устойчивости положения равновесия необходимо чтобы функция П в начале координат имела минимум. Поскольку П равна там нулю, то следует потребовать, чтобы в окрестности нуля функция П была положительно определенной.

Из математики известно, что условием положительной определенности квадратичной формы является ***критерий Сильвестра***:

 ***положительность всех главных диагональных миноров матрицы жёсткости.***

1= c11 > 0

$$Δ\_{2}=\left|\begin{matrix}c\_{11}&c\_{12}\\c\_{21}&c\_{22}\end{matrix}\right|=c\_{11}c\_{22}-c\_{12}^{2}>0$$

….......

$$Δ\_{l}=\left|C\right|>0$$

Если он выполняется, то данное положение равновесия является устойчивым по Ляпунову. Если критерий не выполняется, то требуются более тонкие методы исследования устойчивости.